تصحيح الامتحان الوطني 2020 - 2021

- الدورة العادية -

ع

التمرين الأول:

1- أ) نحل في IR :

$$e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$$

نضع: $t = e^x$ اذن: $t^2 = e^{2x}$

ومنه:

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

و $\Delta = 16 - 4(3) = 16 - 12 = 4 > 0$

حلان:

$$t_1 = \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$t_2 = \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

اذن:

$t = t_1$ أو $t = t_2$

$e^x = 1$ أو $e^x = 3$

$x = \ln(1) = 0$ أو $x = \ln(3)$

مجموعة الحلول هي:

$$S = \{0 ; \ln(3)\}$$

2- ب) نحل في IR المتراجحة:

$$e^{2x} - 4e^x + 3 \leq 0$$

حسب ما سبق:

$$e^{2x} - 4e^x + 3 = (e^x - 1)(e^x - 3)$$

ولدينا:

$e^x - 1 \geq 0 \iff x \geq \ln(1) = 0$

$e^x - 3 \geq 0 \iff x \geq \ln(3)$

اذن:

x		0		$\ln(3)$	
$e^x - 1$	$-$	0	$+$		$+$
$e^x - 3$	$-$		$-$	0	$+$
$e^{2x} - 4e^x + 3$	$+$	0	$-$	0	$+$

اذن مجموعة الحلول هي المجال: $[0 ; \ln(3)]$

2- ج) حساب $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 4e^x + 3}{e^{2x} - 1}$ 1

مباشرة نجد "$\frac{1-4+3}{1-1}$" = "$\frac{0}{0}$" ش.غ.م

لدينا: $e^{2x} - 1 = (e^x)^2 - 1^2 = (e^x - 1)(e^x + 1)$

و $e^{2x} - 4e^x + 3 = t^2 - 4t + 3 \quad (t = e^x)$

$$= (t-1)(t-3)$$

$$= (e^x - 1)(e^x - 3)$$

اذن:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 4e^x + 3}{e^{2x} - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{(e^x - 1)(e^x - 3)}{(e^x - 1)(e^x + 1)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 3}{e^x + 1} = \frac{1-3}{1+1} = -\frac{2}{2} = \boxed{-1}$$

2)

$$e^{2x} + e^x + 4x = 0$$

$$x \in [-1 ; 0]$$

الدالة $f : x \mapsto e^{2x} + e^x + 4x$

متصلة على المجال $[-1 ; 0]$

ولدينا: $f(0) = 1 + 1 + 0 = 2 > 0$

$$f(-1) = e^{-2} + e^{-1} - 4$$

$$= \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e} - 4$$

نعلم أن: $e \simeq 2,7 > 1$ ومنه $e^2 > 1$

اذن: $\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e} < 1 + 1 = 2$

$$\Rightarrow \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e} - 4 < 2 - 4 = -2$$

اذن:

$$f(-1) < 0$$

(ملاحظة: يمكن استعمال الآلة الحاسبة)

اذن: $f(-1) \times f(0) < 0$

اذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا في المجال $[-1 ; 0]$.

التمرين الثاني:

$U_0 = \frac{1}{2}$

$(\forall n \in \mathbb{N})$: $U_{n+1} = \frac{U_n}{3-2U_n}$

1) $U_1 = \frac{U_0}{3-2U_0} = \frac{\frac{1}{2}}{3-\frac{2}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{2}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{4}}$

2) من أجل $n=0$ لدينا:

$0 < U_0 \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{2} \le \frac{1}{2}$

وهذا صحيح.

ليكن $n \ge 0$

نفترض أن: $0 < U_n \le \frac{1}{2}$

ونبين أن: $0 < U_{n+1} \le \frac{1}{2}$

بما أن: $U_n \le \frac{1}{2}$ فإن: $2U_n \le 1$

إذن: $-2U_n \ge -1$

$\Rightarrow 3 - 2U_n \ge 3 - 1 = 2$

إذن:

$\left(3-2U_n > 0 \text{ و } \frac{1}{3-2U_n} \le \frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow 0 < \frac{1}{3-2U_n}$ و $\frac{U_n}{3-2U_n} \le \frac{U_n}{2}$

(لأن: $U_n > 0$)

$\Rightarrow 0 < \frac{U_n}{3-2U_n}$ و $\frac{U_n}{3-2U_n} \le \frac{1}{2}$

(لأن: $\frac{U_n}{2} = \frac{1}{2} \times U_n \le \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \le \frac{1}{4} \le \frac{1}{2}$)

وبالتالي: $0 < U_{n+1} \le \frac{1}{2}$

العبارة صحيحة من أجل $(n+1)$ وحسب مبدأ الترجع:

$(\forall n \in \mathbb{N})\quad 0 < U_n \le \frac{1}{2}$

طريقة أخرى:

$\frac{1}{U_{n+1}} = \frac{3-2U_n}{U_n} = \frac{3}{U_n} - \frac{2U_n}{U_n} = \frac{3}{U_n} - 2$

نعلم أن: $0 < U_n \le \frac{1}{2}$ إذن: $\frac{1}{U_n} \ge 2$

ومنه: $\frac{3}{U_n} \ge 6$ إذن: $\frac{3}{U_n} - 2 \ge 4$

وبالتالي:

$\frac{1}{U_{n+1}} > 0$ و $\frac{1}{U_{n+1}} \ge 2$

(لأن $4 \ge 2$)

أي أن: $0 < U_{n+1}$ و $U_{n+1} \le \frac{1}{2}$

ومنه: $\boxed{0 < U_{n+1} \le \frac{1}{2}}$

ملاحظة: ينبغي أن نبرهن على أن:

$0 < U_{n+1}$ و $U_{n+1} \le \frac{1}{2}$

لا ينبغي نسيان إحدى المتفاوتتين.

3- أ) نبين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}),\quad \frac{U_{n+1}}{U_n} \le \frac{1}{2}$

طريقة رقم 1:

نستعمل البرهان بالتكافؤ:

ليكن n من $\mathbb{N}$.

العبارة:

$\frac{U_{n+1}}{U_n} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow U_{n+1} \le \frac{U_n}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{U_n}{3-2U_n} \le \frac{U_n}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3-2U_n} \le \frac{1}{2}$ (لأن: $U_n > 0$)

$\Leftrightarrow 2 \le 3 - 2U_n$ (لأن: $3-2U_n>0$ و $U_n \le \frac{1}{2}$)

$\Leftrightarrow -1 \le -2U_n$

$\Leftrightarrow 1 \ge 2U_n \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ge U_n$

وهذا صحيح لأن: $0 < U_n \le \frac{1}{2}$

وبالتالي العبارة $\frac{U_{n+1}}{U_n} \le \frac{1}{2}$ صحيحة لكل n من $\mathbb{N}$

طريقة 2: ليكن n من $\mathbb{N}$.

ردينا:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{U_n}\left(\frac{U_n}{3-2U_n}\right) - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{3-2U_n} - \frac{1}{2} = \frac{-1+2U_n}{2(3-2U_n)}$$

نعلم أن: $U_n \leq \frac{1}{2}$ اذن: $\begin{cases} 3-2U_n \geq 0 \\ -1+2U_n \leq 0 \end{cases}$

ومنه: $\frac{-1+2U}{2(3-2U_n)} \leq 0$

وبالتالي: $(\forall n \in \mathbb{N}).\ \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{1}{2}$

3-ب) استنتاج الرتابة: ليكن $n \in \mathbb{N}$

نعلم مما سبق أن: $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{1}{2}$

اذن: $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1$ (لأن: $\frac{1}{2} \leq 1$)

وبالتالي: $(\forall n \in \mathbb{N});\ U_{n+1} \leq U_n$

ومنه (U_n) تناقصية.

4-أ) نبين أن: $0 < U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

طريقة 1:

باستخدام السؤال 3-أ):

نعلم أن: $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{1}{2}$ لكل عدد صحيح n.

اذن العبارة صحيحة بالخصوص من أجل:

0 ; 1 ; 2 ; ...... n أي:

$$\begin{cases} \frac{U_1}{U_0} \leq \frac{1}{2} \\ \text{و } \frac{U_2}{U_1} \leq \frac{1}{2} \\ \text{و } \frac{U_3}{U_2} \leq \frac{1}{2} \\ \vdots \\ \text{و } \frac{U_n}{U_{n-1}} \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

عدد الأسطر هو: $(n-1)+1 = n$

نضرب هذه المتفاوتات طرفا بطرف فنحصل على الجداء:

$$\frac{U_1}{U_0} \times \frac{U_2}{U_1} \times \frac{U_3}{U_2} \cdots \times \frac{U_n}{U_{n-1}} \leq \underbrace{\frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{2}}_{}$$

n من العوامل

اذن: $\frac{U_n}{U_0} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\Rightarrow U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n U_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

(لأن: $U_0 = \frac{1}{2}$)

وبالتالي $(\forall n \in \mathbb{N});\ 0 < U_n < \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

طريقة 2:

العبارة $0 < U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ صحيحة

من أجل $n=0$ لأن:

$0 < U_0 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{0+1} \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$

وهذا صحيح.

ليكن $n \in \mathbb{N}$:

نفترض أن: $0 < U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

نعلم أن: $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{1}{2}$

اذن:

$$\Rightarrow U_{n+1} \leq \frac{1}{2} U_n$$

$$\leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad \text{(حسب ف الترجع)}$$

$$\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$$

اذن: حسب مبدأ الترجع:

$(\forall n \in \mathbb{N});\ 0 < U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

حساب $\lim U_n$:

نعلم أن $(\forall n \in \mathbb{N});\ 0 < U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

وبما أن: $-1 \leq \frac{1}{2} \leq 1$ فإن: $\lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

اذن: $\lim U_n = 0$

التمرين الثالث:

1) $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$

$\Delta = 3 - 4 = -1 < 0$

حلان عقديان مترافقان:

$z_1 = \frac{\sqrt{3} - i\sqrt{1}}{2} = \frac{\sqrt{3} - i}{2}$

$z_2 = \overline{z_1} = \frac{\sqrt{3} + i}{2}$

مجموعة الحلول هي: $S = \{z_1 ; z_2\}$

2) $b = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $a = e^{i\frac{\pi}{6}}$

2-أ) $a = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

اذن:

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

2-ب) التحقق:

$\bar{a}b = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$

$= \sqrt{3}\,\bar{a}a = \sqrt{3}|a|^2 = \sqrt{3} \times 1 = \sqrt{3}$

(لأن: $|a| = |e^{i\frac{\pi}{6}}| = 1$)

ملاحظة: يمكن الحساب عن طريق النشر المعتاد ونجد $\sqrt{3}$.
أو نلاحظ من البداية أن: $b = \sqrt{3}a$
اذن: $\bar{a}b = \bar{a}\sqrt{3}a = \sqrt{3}\,\bar{a}a = \sqrt{3}$

3) تحديد k نسبة التحاكي h.

نعلم أن صيغة التحاكي h هي:

$z' - z_\Omega = k(z - z_\Omega)$

بما أن: $h(A) = B$ فإن:

$z_B = k\,z_A$

اذن: $b = ka$

4-ب) $\forall n \in \mathbb{N};\ v_n = \ln(3 - 2u_n)$

نعلم أن: $\lim u_n = 0$ اذن:

$\lim 3 - 2u_n = 3 - 0 = 3$

وبما أن: $\ln$ دالة متصلة فإن:

$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \ln(3 - 2u_n)$
$= \ln(3)$

5-أ) التحقق:

ليكن n من $\mathbb{N}$ لدينا:

$\frac{1}{u_{n+1}} - 1 = \frac{3 - 2u_n}{u_n} - 1 = \frac{3 - 2u_n - u_n}{u_n}$

$= \frac{3 - 3u_n}{u_n} = 3\left(\frac{1 - u_n}{u_n}\right) = 3\left(\frac{1}{u_n} - 1\right)$

5-ب) استنتاج u_n بدلالة n:

نضع: $w_n = \frac{1}{u_n} - 1$

حسب 5-أ) لدينا:

$w_{n+1} = 3w_n$

اذا (w_n) هندسية أساسها 3 ومنه:

$\forall n \in \mathbb{N};\ w_n = 3^n w_0 = 3^n\left(\frac{1}{u_0} - 1\right)$

$w_n = 3^n(2 - 1) = 3^n$

وبالتالي:

$\frac{1}{u_n} - 1 = 3^n$

$\Rightarrow \frac{1}{u_n} = 1 + 3^n \Rightarrow u_n = \frac{1}{1 + 3^n}$

وبالتالي:

$(\forall n \in \mathbb{N}):\ u_n = \frac{1}{1 + 3^n}$

5

و $DI = |1-(a+1)| = |-a| = |a| = 1$

اذن فهو معين .

5-ز) التحقق :

لدينا :

$$d-b = 1+a-b$$
$$= 1+\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= \frac{2+\sqrt{3}-3}{2}+i\frac{(1-\sqrt{3})}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2}-i\cdot\frac{(\sqrt{3}-1)}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)$$

استنتاج : $\arg(d-b)$

حسب ما سبق لدينا :

$$\arg(d-b) \equiv \arg\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)\right) [2\pi]$$
$$\equiv \arg\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)+\arg(1-i) \ [2\pi]$$

بما أن : $\frac{\sqrt{3}-1}{2}>0$ فإن : $\arg\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) = 0 [2\pi]$

ولدينا :

$$|1-i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

اذن :

$$1-i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left[\sqrt{2}\ ;\ -\frac{\pi}{4}\right]$$

اذن :

$$\arg(1-i) \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]$$

وبالتالي :

$$\boxed{\arg(d-b) \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]}$$

5-ب) الشكل المثلثي للعدد : $1-b$:

$$1-b = 1-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= (-1)\times\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= [1;\pi]\times\left[1;\frac{\pi}{3}\right] = \left[1\times1;\pi+\frac{\pi}{3}\right]$$

اذن :

$$1-b = \left[1;\frac{4\pi}{3}\right]$$

$$b\bar{a} = ka\bar{a} \ .$$

ومنه :

ونعلم أن : $b\bar{a} = \sqrt{3}$ و $a\bar{a} = |a|^2 = 1$

اذن : $\sqrt{3} = k\times1$ ومنه $\boxed{k=\sqrt{3}}$

بما أن $k\in\mathbb{R}$ فإنه يوجد تحاكٍ h مركزه O ويحول A الى B ونسبته $\sqrt{3}$.

4-ز) R دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

اذن :

$$z'-z_A = e^{i\pi/2}(z-z_A)$$

ومنه :

$$\boxed{z' = a+e^{i\pi/2}(z-a)}$$

4-ب) D هي صورة C بالدوران R

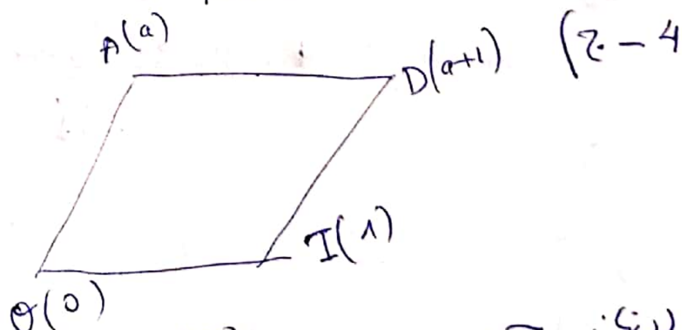
اذن :

$$d = a+e^{i\frac{\pi}{2}}(\bar{a}-a)$$
$$= a+i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)\right)$$
$$= a+i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)$$
$$= a+i\left(-i\frac{2}{2}\right) = a+i(-i) = a+1$$

اذن :

$$\boxed{d = a+1}$$

4-ج)



لدينا :

$$aff(\vec{AD}) = a+1-a = \boxed{1}$$
$$aff(\vec{OI}) = 1-0 = \boxed{1}$$

اذن :

$$\boxed{\vec{AD} = \vec{OI}}$$

وبالتالي $ADIO$ متوازي أضلاع

وله ضلعان متتابعان متقايسان هما $[AD]$ و $[DI]$ لأن :

$$AD = |d-a| = |a+1-a| = 1$$

2 - ب) $\frac{f(x)}{x} = 2\ln(x) - 2$

لدينا: $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

تأويل هندسي:

(C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب.

3 - أ) حساب $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x}$

لدينا: $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} 2\ln(x) - 2$

$= \boxed{-\infty}$

لأن: $\lim_{x\to -\infty} \ln(x) = -\infty$

تأويل هندسي:

لدينا: $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x}$

اذن: $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty$

ومنه (Cf) يقبل نصف مماس موجه نحو الأسفل ↓ في النقطة ذات الأفصول $x_0=0$ (أصل المعلم).

3 - ب) f ق.ا على $]0,+\infty[$

ولدينا، $(\forall x>0);\ f'(x) = (2x\ln(x) - 2x)'$

$= (2x)'\ln(x) + 2x\ln'(x) - (2x)'$

$= 2\ln(x) + 2x \times \frac{1}{x} - 2$

$= 2\ln(x)$

اذن؛ $(\forall x>0);\ f'(x) = 2\ln(x)$

3 - ج) جدول تغيرات f:

5 - ج) استنتاج قياس $(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BD})$،

نعلم أن: $(\overrightarrow{BI}; \overrightarrow{BD}) \equiv \arg\left(\frac{d-b}{1-b}\right)$

اذن $(\overrightarrow{BI}; \overrightarrow{BD}) \equiv \arg(d-b) - \arg(1-b)\ [2\pi]$

$\equiv -\frac{\pi}{4} - \left(\frac{4\pi}{3}\right)\ [2\pi]$

لأن $\arg(1-b) \equiv \frac{4\pi}{3}\ [2\pi]$ سؤال 5 - ب)

و $\arg(d-b) = -\frac{\pi}{4}$ حسب 5 - أ)

اذن: $(\overrightarrow{BI}; \overrightarrow{BD}) \equiv \frac{-19\pi}{12}\ [2\pi]$

ملاحظة: لدينا

$-\frac{19\pi}{12} + 2\pi = \frac{5\pi}{12}$

اذن: $(\overrightarrow{BI}; \overrightarrow{BD}) \equiv \frac{5\pi}{12}\ [2\pi]$

هي أيضا إجابة صحيحة.

المسألة:

$$\begin{cases} f(x) = 2x\ln(x) - 2x\ ;\ x>0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) اتصال f في 0 على اليمين،

لدينا: $f(0)=0$

نعلم أن: $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ اذن:

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 - 2\times 0 = 0 = f(0)$

ومنه f متصلة في 0 على اليمين،

2 - أ) حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

لدينا: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x(2\ln(x) - 2)$

$= +\infty \times (+\infty) = \boxed{+\infty}$

(لأن $\lim \ln(x) = +\infty$)

لدينا: $f'(x) = 2\ln(x)$

و $\ln(x) \geq 0 \iff x \geq 1$

إذن:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	0	↘	-2	↗	$+\infty$

4-أ) ليكن $x \in]0,+\infty[$ لدينا:

$f(x) = 0 \iff 2x\ln(x) = 2x$

$\iff \ln(x) = 1 \iff x = e$

إذن حل المعادلة $f(x) = 0$

هو: $\boxed{x = e}$

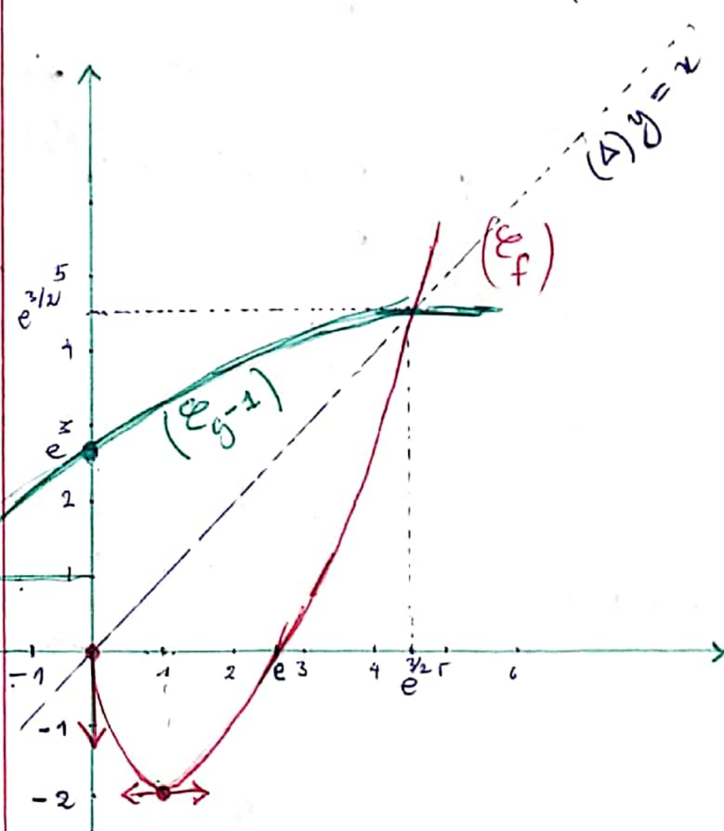
حل المعادلة: $f(x) = x$

$f(x) = x \iff 2x\ln(x) - 2x = x$

$\iff 2x\ln(x) = 3x \iff \ln(x) = \frac{3}{2}$

الحل هو: $\boxed{x = e^{3/2}}$

4-ب) انشاء $(\mathcal{C})$:



ملاحظة p1: $x = e$ حل المعادلة $f(x) = 0$ إذن $(\mathcal{C})$ يقطع (Ox) في $x = e$

p2: $x = e^{3/2}$ هو حل المعادلة $f(x) = x$

يعني: $f(e^{3/2}) = e^{3/2}$

حيث: $e^{3/2} \simeq 4,5$

p3: $f'(1) = 0$ إذن $(\mathcal{C})$ يقبل مماسا أفقيا في النقطة: $A(1;-2)$

(لأن: $f(1) = -2$)

5-أ) حساب: $\int_1^e x\ln(x)\,dx$

بالأجزاء، نضع:

$\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v'(x) = x \end{cases}$: $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{x^2}{2} \end{cases}$

إذن:

$$\int_1^e x\ln(x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}\frac{x^2}{2}\,dx$$

$$= \frac{e^2\ln(e)}{2} - \frac{1}{2}\ln(1) - \int_1^e \frac{x}{2}\,dx$$

$$= \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2e^2 - e^2}{4} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$$

إذن: $\boxed{\int_1^e x\ln(x)\,dx = \frac{1+e^2}{4}}$

5-ب) استنتاج: نحسب $\int_1^e f(x)\,dx$

لدينا:

$$\int_1^e f(x)\,dx = \int_1^e 2x\ln(x) - 2x\,dx$$

$$= 2\int_1^e x\ln(x)\,dx - \int_1^e 2x\,dx$$

$$= 2\left(\frac{1+e^2}{4}\right) - \left[x^2\right]_1^e$$ (محاسبة نعوض)

$$= \frac{1+e^2}{2} - (e^2 - 1) = \frac{1+e^2}{2} - \frac{2e^2 - 2}{2}$$

$$= \boxed{\frac{3-e^2}{2}}$$

8

8) $\begin{cases} h(x) = x^3+3x \ ; \ x \leq 0 \\ h(x) = 2x\ln(x) - 2x \ ; \ x > 0 \end{cases}$

8أ) لدينا:
$$\lim_{x \to 0^<} h(x) = \lim x^3+3x = 0 = h(0)$$
اذا: h متصلة في 0 على اليسار

ولدينا:
$$\lim_{x \to 0^>} h(x) = \lim_{x\to 0^>} 2x\ln(x) - 2x = 0 = h(0)$$
اذا: h متصلة على اليمين في 0

بما أن h متصلة على اليمين وعلى اليسار في 0 فإنها متصلة في 0 .

8-ب) قابلية الاشتقاق في 0 على اليسار.

لدينا
$\forall x \leq 0 : \quad h(x) = x^3+3x$

$x \mapsto x^3+3x$ دالة حدودية .
اذا فهي ق.ش على IR
وبالخصوص في 0 على اليسار

ومنه h ق.ش في 0 على اليسار

لدينا $h'(x) = 3x^2+3$

اذا: $h'_g(0) = 3$

التأويل الهندسي: (C_h) يقبل نصف مماس في النقطة ذات الأفصول $x_0 = 0$ معادلته:
$$\begin{cases} y = h'_g(0)(x-0) + h(0) \\ x \leq 0 \end{cases}$$
أي أن:
$$\begin{cases} y = 3x \\ x \leq 0 \end{cases}$$

8-ج) h غير ق.ش يمينا في 0 .

التعليل: $\forall x > 0 : \ h(x) = f(x)$

f غير ق.ش في 0 (حسب سؤال 3-ج) على اليمين. اذا h كذلك.

ومنه h غير ق.ش في 0 .

* * *

6-أ) حسب جدول تغيرات f
القيمة الدنيا ل f على $]0,+\infty[$ هي $f(1) = -2$.

6-ب) الاستنتاج:
بما أن: -2 قيمة دنيا ل f على $]0,+\infty[$
فإنه لكل x من $]0,+\infty[$ لدينا:
$$f(x) \geq -2 \Rightarrow 2x\ln(x) - 2x \geq -2$$
$$\Rightarrow 2x\ln(x) \geq 2x - 2$$
$$\Rightarrow \ln(x) \geq \frac{2x-2}{2x} \quad (x>0 \text{ لأن})$$
$$\Rightarrow \ln(x) \geq \frac{2(x-1)}{2x}$$
اذن:
$$(\forall x \in]0,+\infty[) \quad \ln(x) \geq \frac{x-1}{x}$$

7) لتكن g قصور f على $[1,+\infty[$.

7-أ) g متصلة على $[1,+\infty[$.
و g تزايدية قطعا على $[1,+\infty[$.
اذن g تقبل دالة عكسية g^{-1} .
g^{-1} معرفة على المجال:
$$J = g([1+\infty[) = f([1+\infty[)$$
$$= [f(1); \lim_{x\to+\infty} f(x)[$$
$$= [-2,+\infty[$$

7-ب) إنشاء منحنى g^{-1} .
أنظر الشكل السابق:
(C) و $(C_{g^{-1}})$ متماثلان بالنسبة للمنصف الأول للمعلم:
$(\Delta) : y = x$

ملاحظة
$(1,-2) \in (C) \Rightarrow (-2,1) \in (C_{g^{-1}})$
$(e,0) \in (C) \Rightarrow (0,e) \in (C_{g^{-1}})$
$D_{g^{-1}} = [-2;+\infty[$